Esercizio 6.28

Siano $a, b \in \mathbb{Z}$, non entrambi nulli. Sia $d = \mathrm{MCD}(a, b)$. Proviamo che $h = \frac{ab}{d}$ è un minimo comune multiplo di a, b.

Anzitutto, poiché d divide a e d divide b, i numeri $\frac{a}{d}$ e $\frac{b}{d}$ sono interi. Quindi $h = a\frac{b}{d} = b\frac{a}{d}$ è multiplo di a e di b. Dunque h soddisfa la parte (a) della definizione di minimo comune multiplo.

Sia ora $k \in \mathbb{Z}$ multiplo di a e di b. Allora esistono $q, q' \in \mathbb{Z}$ tali che $k = aq = bq'$. In particolare si ha quindi

$$\frac{a}{d}dq = \frac{b}{d}dq',$$

da cui

$$\frac{a}{d}q = \frac{b}{d}q'.$$

Dunque il numero intero $\frac{a}{d}$ divide $\frac{b}{d}q'$, ma è coprimo con $\frac{b}{d}$ (vedi l'Osservazione 6.26). Ne consegue che $\frac{a}{d}$ divide q' (vedi la Proposizione 6.24). Esiste dunque $q'' \in \mathbb{Z}$ tale che $q' = \frac{a}{d}q''$. Si ha allora, per sostituzione,

$$k = b\frac{a}{d}q'' = hq''.$$

Abbiamo così dedotto che h divide k. Ciò prova che h soddisfa anche la parte (b) della definizione di minimo comune multiplo, e conclude la dimostrazione.

<u>Osservazione finale:</u> Se a, b sono interi non nulli, allora $\mathrm{mcm}(a, b) = \frac{|ab|}{\mathrm{MCD}(a, b)}$.